

Exercice1

Soit f la fonction définie sur $] -\infty, 1]$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{-1 + \sqrt{1-x}}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

1. a) Montrer que f est continue sur $] -\infty, 1]$
 b) Montrer que : $\forall x \in] -\infty, 1], f(x) = \frac{-1}{1 + \sqrt{1-x}}$
2. a) montrer que f est décroissante sur $] -\infty, 1]$
 b) Déterminer $f(]-\infty, 1])$ et $f([0; 1])$
3. Montrer que l'équation : $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$ admet dans l'intervalle $]0; 1[$ une solution unique α
4. Soit g la fonction définie sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right]$ par :
$$\begin{cases} g(x) = f(\tan x) & \text{si } x \neq -\frac{\pi}{2} \\ g\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$$
 - a) Montrer que g est continue sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right]$
 - b) Montrer que l'équation $g(x) = -\frac{4}{9}$ admet une solution $\beta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right]$
 - c) Calculer $\tan(\beta)$

Exercice2

Soit f_n la fonction définie par : $f_n(x) = x^5 + nx - 2n$ où $n \in \mathbb{N}$

1. a) Montrer que f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et donner $f_n(\mathbb{R})$
 b) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution unique x_n et que $x_n \in [0; 2]$
 c) Calculer x_0 et x_1 et montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n \geq 1$
2. a) Comparer $f_{n+1}(x)$ et $f_n(x)$ pour tout $x \in [0; 2]$
 b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \leq x_{n+1}$
 c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 2 - \frac{32}{n} \leq x_n \leq 2$
3. Soit g la fonction définie par :
$$\begin{cases} g(x) = -2 - x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) & \text{si } x < 0 \\ g(x) = f_1(x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$
 - a) Calculer : $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$
 - b) Montrer que : $\forall x \in]-\infty, 0[, -x^2 - 2 \leq g(x) \leq x^2 - 2$ puis montrer que g est continue en 0